Zadatak #12

# Definicija i osnovni primeri planarnih grafova

U teoriji grafova, **planarni grafovi** predstavljaju specifičnu klasu grafova koji se mogu vizualizovati tako da se njihove ivice ne presecaju, osim na krajevima, tj. u čvorovima. Ova osobina čini ih pogodnim za analizu i primenu u različitim disciplinama, kao što su geometrijsko modelovanje, dizajn mreža i kartografija.

## **Definicija**

Graf G=(V,E), gde je V skup čvorova, a E skup ivica, je **planaran** ako postoji način da se nacrta u ravni (dvodimenzionalnoj površini) tako da se nijedne dve ivice ne presecaju osim u zajedničkim krajnjim tačkama. Takav crtež se naziva **planarna reprezentacija grafa**. Ako graf nije moguće nacrtati bez presecanja ivica, kažemo da je **neplanaran**.

## **Svojstva planarnog grafa**

Planarni grafovi imaju nekoliko ključnih svojstava koja ih razlikuju od drugih vrsta grafova:

1. Za svaki povezan planarni graf važi:

gde su:

* V – broj čvorova (vertikala),
* E – broj ivica (linija koje povezuju čvorove),
* F – broj lica (područja ograničeno ivicama, uključujući spoljašnje lice).

**Primer:**  
Razmotrite graf trougla ():

* V=3 (tri čvora),
* E=3 (tri ivice),
* F=2 (jedno unutrašnje lice i jedno spoljašnje lice).

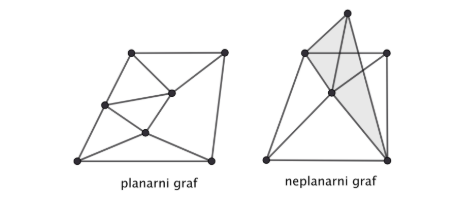
Primena formule:

1. Planarni grafovi bez petlji i višestrukih ivica imaju ograničenje za broj ivica:

gde je V broj čvorova. Ovo ograničenje se može koristiti za proveru da li je graf potencijalno planaran.

1. Podgrafovi **i :**  
   Ako graf sadrži (potpuni graf sa pet čvorova) ili (potpuni dvodelni graf sa dve grupe od po tri čvora) kao podgraf, on nije planaran. Ovo pravilo proističe iz **Kuratovskog teorema**.

## **Primeri planarnih I neplanarnih grafova**



# Stepen oblasti u planarnom grafu

U planarnom grafu, **oblasti** (takođe poznate kao lica) predstavljaju povezane delove ravni koje ostaju kada se graf iscrta bez presecanja grana. Ove oblasti su omeđene granama grafa i mogu biti unutrašnje (nalaze se "unutar" crteža grafa) i spoljašnje (najveća oblast koja okružuje ostatak grafa).

**Definicija**:

Stepen oblasti u planarnom grafu je broj grana koje čine granicu te oblasti.

* Svaka grana koja se nalazi na granici jedne oblasti doprinosi njenom stepenu.
* Ako grana graniči istu oblast sa obe strane (npr. kod petlji ili paralelnih grana), ona se računa dva puta u stepenu te oblasti.

Zbir stepena svih oblasti:

U svakom planarnom grafu važi važna formula:

gde je:

* e – broj grana u grafu.

Ovo znači da se svaka grana pojavljuje u granicama tačno dve oblasti, pa zato doprinosi zbiru stepena sa dva.

**Primer**:

Razmotrimo trougao, tj. planarni graf sa 3 temena i 3 grane koje ih spajaju:

* Graf ima 2 oblasti – jednu unutrašnju (trougao) i jednu spoljašnju.
* Obe oblasti su omeđene sa 3 grane → njihov stepen je 3.
* Ukupan zbir stepena oblasti: 3 + 3 = 6 = 2 × 3, što odgovara broju grana puta dva.

**Napomena**:

Razumevanje stepena oblasti je ključno pri proučavanju strukture planarnog grafa i koristi se u kombinaciji sa Eulerovom formulom:

v − e + f = 2

gde su:

* v – broj temena,
* e – broj grana,
* f – broj oblasti (lica).

# Formulisanje i dokaz da u povezanom planarnom grafu sa bar 3 čvora broj grana nije veći od trostrukog broja čvorova umanjenog za šest

**Def.** Graf je planaran ako se može nacrtati u ravni tako da ne postoje grane koje se seku.

**Def.** Povezan planaran graf je graf koji ispunjava uslov planarnosti i u kom postoji put izmežu svaka dva čvora.

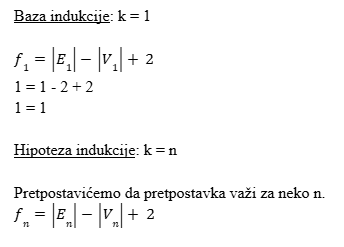
Planaran prikaz grafa deli ravan na konačan broj ograničenih ili neograničenih oblasti.

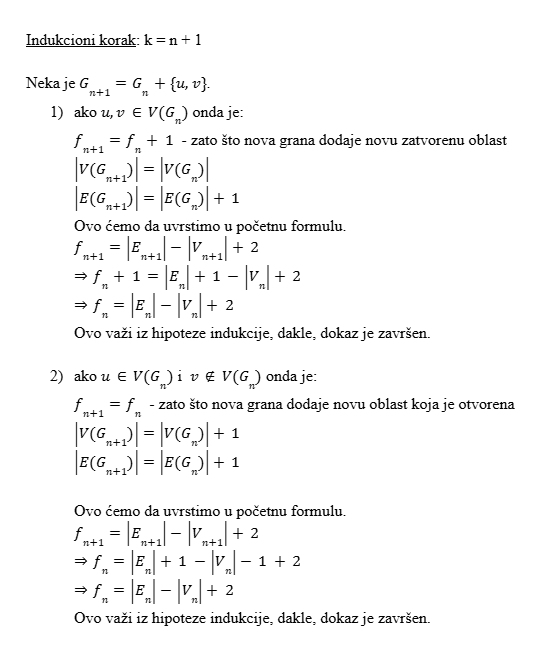
Teorema

Neka je G = (V, E), gde je V broj čvorova |V| ≥ 2, a E broj grana, povezan planaran prost graf i neka je *f* broj oblasti na koje on deli ravan. Tada je: f=E-V+2.

**Dokaz**

Neka je |E| = m. Neka je G1 graf koji sadrži proizvoljnu granu grafa G i njoj incidentne čvorove. Ako je m ≥ 2, konstruišemo sukcesivno grafove G2, G3, …, Gm tako što ćemo svakom sledećem grafu dodati granu koja je incidentna sa jednim čvorom prethodnog grafa, kao i novi čvor incidentan sa tom granom. Ovakva grana će uvek postojati jer je graf povezan. Dokazaćemo da za svako važi =. Za dokaz ćemo koristiti matematičku indukciju.





# Formulisanje i dokaz da u povezanom planarnom grafu sa bar 3 čvora i bez kontura dužine 3 broj grana nije veći od trostrukog broja čvorova umanjenog za 4

**Teorema**  
Neka je *G=(V, E)* povezan planaran graf sa najmanje tri čvora (∣*V*∣≥3) i neka ne sadrži konture dužine 3 (tj. graf nema trouglova).  
Tada važi sledeća nejednakost za broj grana:

**Dokaz**  
Polazimo od poznate Eulerove formule za povezane planarne grafove:

gde su:

* f — broj oblasti (lica) u planarnom prikazu grafa,
* ∣*V*∣— broj čvorova,
* ∣*E*∣ — broj grana.

U planarnom prikazu grafa, svaka oblast je ograničena konturom. Ako graf ne sadrži konture dužine 3, znači da je **dužina svake konture najmanje 4**. Drugim rečima, **stepen svake oblasti je najmanje 4**.

Ukupan zbir stepena svih oblasti jednak je **dva puta broj grana**, jer svaka grana pripada tačno dve oblasti:

Pošto ima f oblasti, i svaka ima stepen najmanje 4, dobijamo:

Sada u Eulerovu formulu:

zamenimo u prethodnu nejednakost:

Raširimo:

Oduzimanjem ∣*E*∣ sa obe strane:

**Zaključak**  
U svakom povezanom planarnom grafu sa najmanje tri čvora koji ne sadrži trouglove (konture dužine 3), broj grana je ograničen sledećom nejednakošću:

# Dokazati da i nisu planarni grafovi

Planarni graf je graf kod kog se grane ne seku ako se posmatra u 2D

* – kompletni graf sa 5 čvorova
* – potpuno bipartivni graf sa po 3 čvora u svakom podskupu

**Dokaz za**

Ako je broj čvorova n=5 a broj grana e= tj. 10 ne važi uslov za planarnost prostog povezanog grafa, a to je

jer je 10 > 3\*5-6

**Dokaz za**

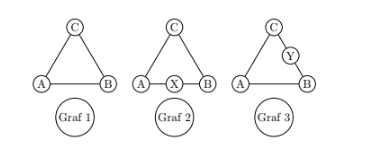
Ako je broj čvorova n=6 a broj grana e=3\*3=9 i znamo da graf ne sadrži cikluse dužine 3, tj. Nema trouglove najkraći ciklus je dužine 4

Ako je graf planaran I ne sadrži trouglove onda mora važiti

a u ovom slučaju to ne važi jer je 9 >2\*6-4

Ovo su prema Kuratovskom osnovni neplanarni grafovi i svaki neplanarni graf sadrži njihovu verziju.

# Homeomorfni grafovi

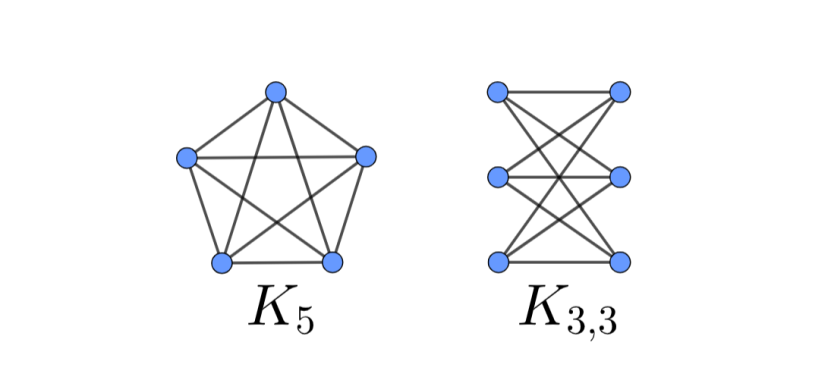
Definicija: Dva grafa su homeomorfna ako se mogu dobiti od istog grafa primenom konačno mnogo elementarnih deoba grana

Gore su prikazana tri različita grafa. Grafovi G2 i G3 su homeomorfni jer je G2 dobijen od G1 deobom grane {a, b}, a G3 je dobijen od G1 deobom grane {b, c}

# Tvrđenje Kuratovskog

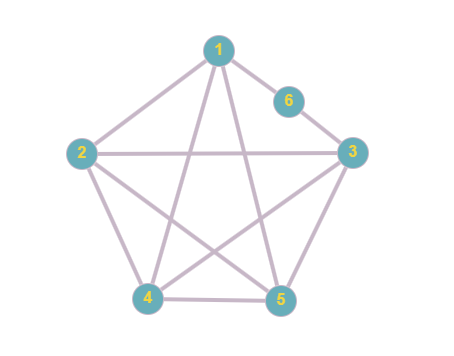
Tvrđenje Kuratovskog je jedno od značajnijih rezultata u teoriji grafova, posebno kada se radi o planarnim grafovima. Ima primenu u prepoznavanju neplanarnih grafova.

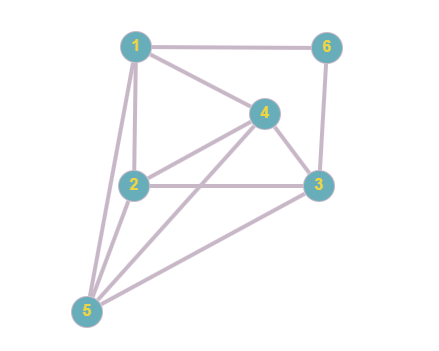
**Tvrđenje**: Graf je planaran, ako I samo ako ne sadrži podgraf koji je homeomorfan grafu ili grafu



Već smo rekli da su grafovi homeomorfni ako se mogu dobiti deobom grana od istog grafa.

Sada ćemo za primer uzeti graf G koji izgleda ovako:



Koliko god razmeštali čvorove, tvrđenje Kuratovskog nam govori da on nije planaran. Ovo je samo jedan primer:

Ali kao što vidimo, grane 2-3 I 4-5 se presecaju u 2D ravni. Kada bismo obrisali jednu od te dve grane, više ne bismo imali graf homeomorfan sa K5.

